MATHÉMATIQUES ET ALGORITHMIQUE SP 1

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986.

Les parties de ce problème sont dans une large mesure indépendantes.
La cinquième partie sera traitée sur feuille double séparée

PARTIE I

Soit la série entière de la variable réelle t, de somme $h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{1+n^2}$

1) Déterminer le rayon de convergence r de cette série entière et l'ensemble de définition D de la fonction h.

2) Montrer que h est continue sur D.

3) Montrer que h est de classe C^1 sur $[-r,r[$.

4) Montrer que $\lim_{\substack{t \to r \\ t < r}} h'(t) = +\infty$.

5) Tracer le graphe de h. On ne demande pas d'étudier le signe h"(t).

PARTIE II

Soit l'équation différentielle (L) : $(1 - t)(t^2 y'' + t y' + y) = 1$

On appelle (H) l'équation homogène associée à (L).

1) Résoudre (H) sur les intervalles

$$I_1 =]-\infty, 0[, \quad I_2 =]0, 1[\quad \text{et} \quad I_3 =]1, +\infty[.$$

On pourra utiliser le changement de variable $x = \ln|t|$.

2) Déterminer l'ensemble des solutions de (H) sur $]0,+\infty[$.

3) Déterminer l'ensemble des solutions de (H) sur $]-\infty,1[$.

4) En déduire que la fonction h définie au I est l'unique solution de (L) sur $]-1,1[$.

PARTIE III

Soit f la fonction 2π - périodique telle que : $\forall x \in]-\pi,\pi]$, $f(x) = e^x$.

1) Déterminer la série de Fourier de f et étudier sa convergence.

2) Justifier l'existence des sommes de séries suivantes et les calculer pour :

$x \in [-\pi,\pi]$: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(n x)}{1+n^2}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n \sin(n x)}{1+n^2}$.

A SUIVRE

3) Calculer pour $x \in [0,2\pi]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\,x)}{1+n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin(n\,x)}{1+n^2} .$$

4) en déduire les valeurs exactes de h(1) et de h(-1).

5) Calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}$.

PARTIE IV

On se propose dans cette partie, indépendamment des résultats du III 4), de faire un calcul approché de h(1).

On pose : $u_n = \frac{1}{1+n^2}$, $s = h(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$, $s_n = \sum_{p=0}^{n} u_p$ et

$r_n = s - s_n$.

1) Etablir que : $\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leq r_n \leq \int_{n}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et en déduire que $r_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2) Montrer que $\forall\, n \geq 2$, $\frac{1}{n(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n(n-1)}$

et en déduire que : $\frac{1}{n+1} < r_n < \frac{1}{n}$.

3) Soit $\varepsilon \in R^{+*}$. En tenant compte du 2), comment suffit-il de choisir $n \in N^*$ pour que l'erreur de méthode dans le calcul approché de s soit inférieure à ε, si on adopte pour valeur approchée de s :

a) le réel s_n

b) le réel $\bar{s}_n = s_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$.

Préciser n pour $\varepsilon = 10^{-3}$, $\varepsilon = 10^{-6}$.

4) On désire accélérer la convergence.

a) Calculer des constantes a et b réelles telles que :

$$\forall\ n \in N^*,\ u_n = \frac{a}{n(n+1)} + \frac{b}{n(n+1)(n+2)} + v_n \quad \text{avec} \lim_{n \to +\infty} n^3 v_n = 0 .$$

et expliciter v_n.

b) Soient : $\sigma_n = \sum_{p=1}^{n} v_p$; $\rho_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} v_p$; $\sigma = \sigma_n + \rho_n$.

Montrer que $\forall\, n \geq 2$, $0 \leq \rho_n < \frac{1}{3n^3}$

Tournez la page S.V.P.

c) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

Soit $W_n = r_n - \rho_n$. Mettre W_n sous forme d'une fraction rationnelle et montrer que :

$$s = \sigma + \frac{9}{4} .$$

d) Reprendre alors le 3) si on adopte pour valeur approchée de s le réel

$$\alpha) \ \lambda_n = \sigma_n + \frac{9}{4}$$

$$\beta) \ \mu_n = s_n + W_n .$$

e) Pour $\varepsilon > 0$, soit $N(\varepsilon)$ la somme du nombre d'additions, du nombre de multiplications et du nombre de divisions qu'il est nécessaire de calculer pour obtenir s à ε près. Pour chacune des valeurs approchées obtenues :

s_n, $\bar{s}_n$, λ_n, μ_n, calculer un équivalent de $N(\varepsilon)$ quand ε tend vers zéro.

PARTIE V

Cette cinquième partie sera traitée sur feuille double séparée

Reprenons les données et les notations de la PARTIE IV.

On admettra de plus que : $s = \frac{1}{2}(1 + \pi.\text{cotanh}\ \pi)$

Ecrire un algorithme (codage en pseudo-code ou en Pascal) permettant de calculer la plus petite valeur de n telle que $s - s_n \leq \varepsilon$.

REMARQUES :

* cotanh signifie cotangente hyperbolique ;
* on dispose d'une bibliothèque mathématique possédant les fonctions suivantes :
  sin, cos, tan, arcsin, arccos, arctan, exp, log, ln.
* on fabriquera une fonction qui calculera le terme général de la série u_n.
* l'algorithme, lors de son exécution, demandera à l'opérateur une valeur ε au clavier.
* l'algorithme réitèrera le calcul tant que l'opérateur n'aura pas enfoncé la touche correspondant à la lettre o minuscule.

FIN